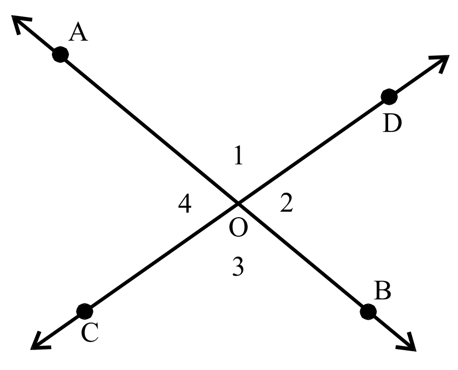
ความเท่ากันทุกประการ

1. นิยาม รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี
ใช้สัญลักษณ์ " $\cong$ " แทนคำว่า "เท่ากันทุกประการ" เช่น
รูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B เขียนแทนด้วย รูป A $\cong$ รูป B

2. นิยาม ส่วนของเส้นตรงสองเส้นจะเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อส่วนของเส้นตรงสองเส้นนั้นยาวเท่ากัน
ส่วนของเส้นตรง AB เขียนแทนด้วย $\overline{AB}$
ส่วนของเส้นตรง CD เขียนแทนด้วย $\overline{CD}$
ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB เขียนแทนด้วย $m(\overline{CD})$
ถ้า $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ แล้วจะได้ $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$ หรือ $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$ แล้วจะได้ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
และเรานิยมเขียน $AB = CD$ แทน $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ หรือ $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$

3. นิยาม มุมสองมุมจะเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อมุมทั้งสองนั้นมีขนาดเท่ากัน
มุม A เขียนแทนด้วย $\hat{A}$ และขนาดของมุม A เขียนแทนด้วย $m(\hat{A})$
มุม B เขียนแทนด้วย $\hat{B}$ และขนาดของมุม B เขียนแทนด้วย $m(\hat{B})$
โดยนิยามข้างต้น ถ้า $\hat{A} \cong \hat{B}$ แล้วจะได้ $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$ และ ถ้า $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$ แล้วจะได้
$\hat{A} \cong \hat{B}$ แต่เรานิยมใช้สัญลักษณ์ $\hat{A}$ แทน $m(\hat{A})$ ดังนั้น เราจึงนิยมใช้ $\hat{A} = \hat{B}$ แทน $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$
และ ใช้ $\hat{A} = \hat{B}$ แทน $\hat{B} \cong \hat{B}$

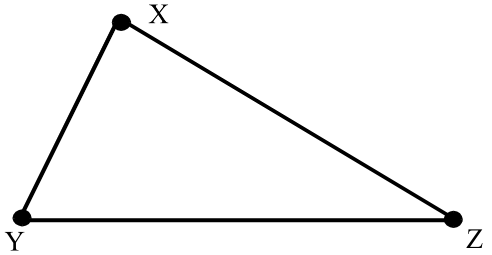
4. ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากัน



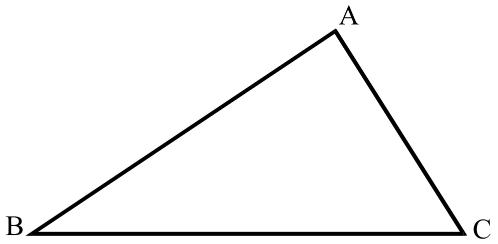
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ตัดกันที่จุด O
เรียก $\hat{1}$ กับ $\hat{3}$ และ $\hat{2}$ กับ $\hat{4}$ ว่าเป็นมุมตรงข้าม
ตามทฤษฎีบทนี้ เราจะได้ว่า $\hat{1} = \hat{3}$ และ $\hat{2} = \hat{4}$

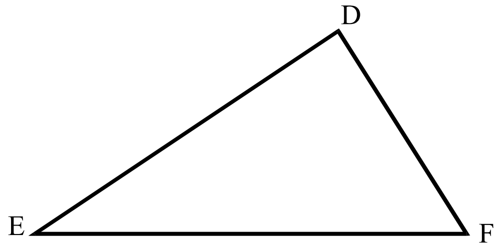
5. ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

นิยาม รูปสามเหลี่ยมคือ รูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น เชื่อมต่อจุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และเราเรียกจุดทั้งสามจุดนี้ว่า จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม



จากรูป จุด X,Y,Z เป็นจุดสามจุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ และ $\overline{ZX}$ เชื่อมต่อจุด X,Y และ Z เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยม XYZ ซึ่งเขียนแทนด้วย ΔXYZ





ถ้า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ก็แสดงว่ารูป ΔABC จะทับกันสนิทกับรูป ΔDEF

จุด A จะทับจุด D จุด B จะทับจุด E และจุด C จะทับจุด F

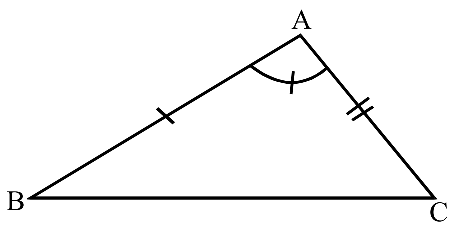
$\overline{AB}$ จะทับ $\overline{DE}$ $\overline{BC}$ จะทับ $\overline{EF}$ และ $\overline{CA}$ จะทับ $\overline{FD}$

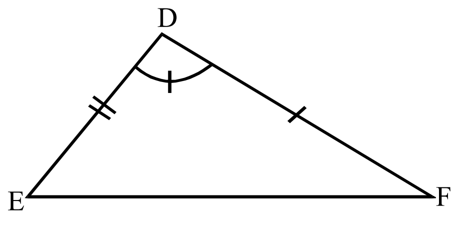
$\hat{A}$ จะทับ $\hat{D}$ $\hat{B}$ จะทับ $\hat{E}$ และ $\hat{C}$ จะทับ $\hat{F}$

จากคุณสมบัติดังกล่าวเราจะสรุปได้ว่า "รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ"

6. รูปสามเหลี่ยมที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน-มุม-ด้าน (ด.ม.ด.)

ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านเท่ากันสองคู่ และขนาดของมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



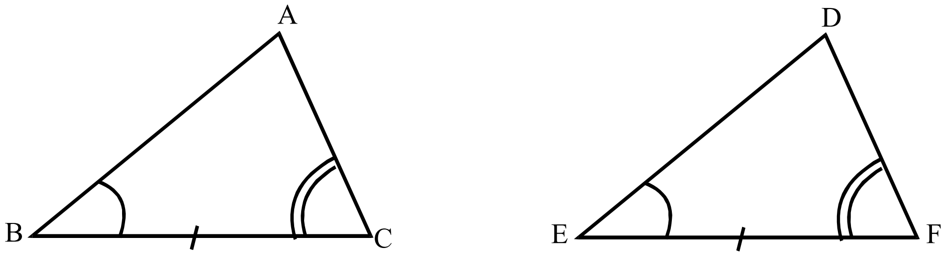


ให้ ΔABC และ ΔDEF มี $AB = DF$, $B\hat{A}C = E\hat{D}F$ และ $AC = DE$

จะได้ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ด.ม.ด.)

7. รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม-ด้าน-มุม (ม.ด.ม.)

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมเท่ากันสองคู่ และด้านที่เป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

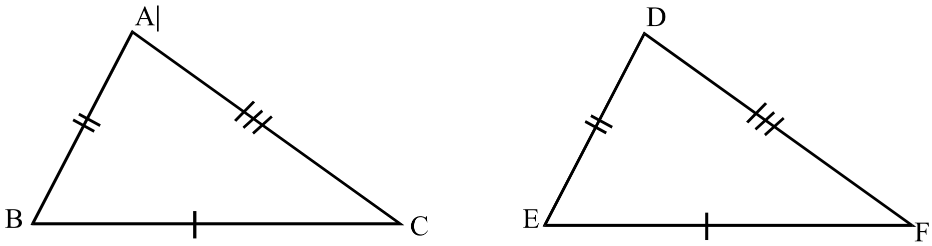


ให้ Δ ABC และ Δ DEF มี $A\hat{B}C = D\hat{E}F$, $BC = EF$ และ $A\hat{C}B = D\hat{F}E$

จะได้ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ม.ด.ม.)

8. รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน-ด้าน-ด้าน (ด.ด.ด.)

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านเท่ากันสามคู่แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ

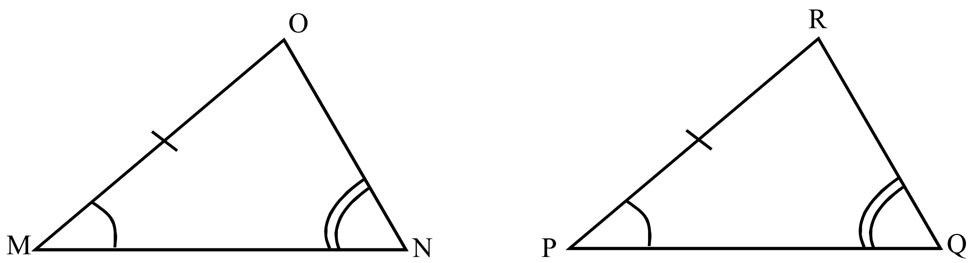


ให้ Δ ABC และ Δ DEF มีด้าน $AB = DE$, $BC = EF$ และ $AC = DF$

จะได้ว่า $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (ด.ด.ด.)

9. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม-มุม-ด้าน (ม.ม.ด.)

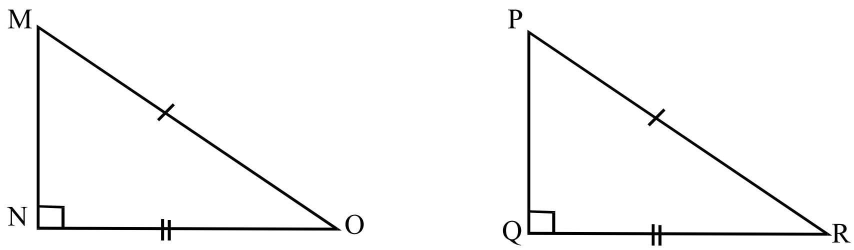
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านเท่ากันคู่หนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



จากรูป	$O\hat{M}N$	=	$R\hat{P}Q$	(มุม)
	$M\hat{N}O$	=	$P\hat{Q}R$	(มุม)
	OM	=	RP	(ด้าน)
ดังนั้น	Δ MNO	$\cong$	Δ PQR	เพราะมีความสัมพันธ์กันแบบ ม.ม.ด.

10. รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ฉาก-ด้าน-ด้าน (ฉ.ด.ด.)

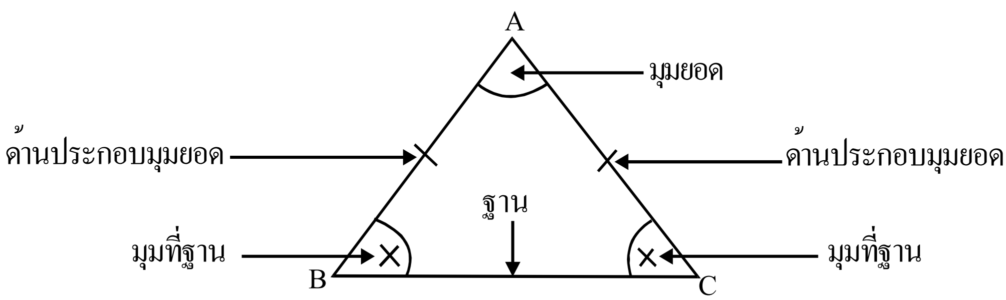
ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 2 รูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาวเท่ากัน แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



จากรูป	$M\hat{N}O$	=	$P\hat{Q}R$	(มุมฉาก)
	MO	=	PR	(ด้านตรงข้ามมุมฉาก)
	NO	=	QR	(ด้าน)
ดังนั้น	Δ MNO	$\cong$	Δ PQR	เพราะมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉ.ด.ด.

11. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

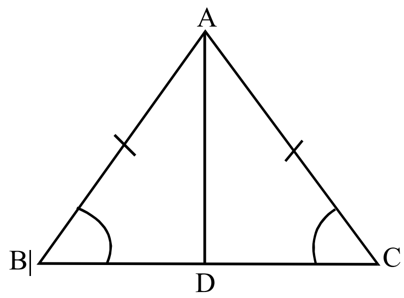
นิยาม รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน



Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี AB = AC

เรียก	BC	ว่า ฐาน
เรียก	$A\hat{B}C$ และ $A\hat{C}B$	ว่า มุมที่ฐาน
เรียก	$B\hat{A}C$	ว่า มุมยอด
เรียก	AB และ AC	ว่า ด้านประกอบมุมยอด

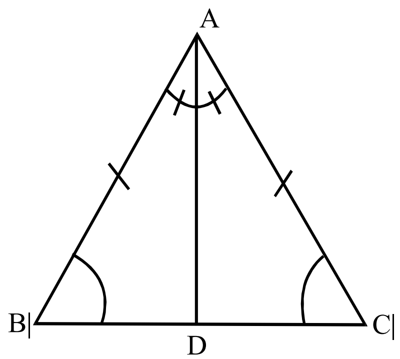
12. คุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



ให้ Δ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี AB = AC

1. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะมีขนาดเท่ากัน ($A\hat{B}D = A\hat{C}D$)
2. ถ้าลากเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ
3. ถ้าลากเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
4. ถ้าลากเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ AB = AC และ $B\hat{A}D = C\hat{A}D$ จงพิสูจน์ว่า $\Delta ABD \cong \Delta ADC$

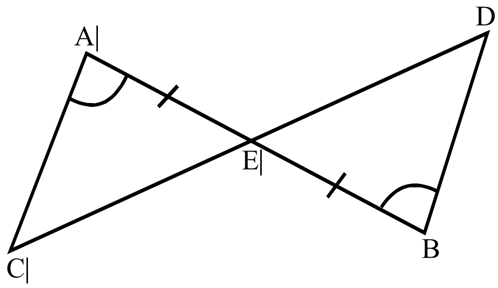


วิธีทำ

1. AB = AC (_______________)
2. $B\hat{A}D = C\hat{A}D$ (_______________)
3. AD = AD (_______________)

ดังนั้น $\Delta ABD \cong \Delta ADC$ (_______________)

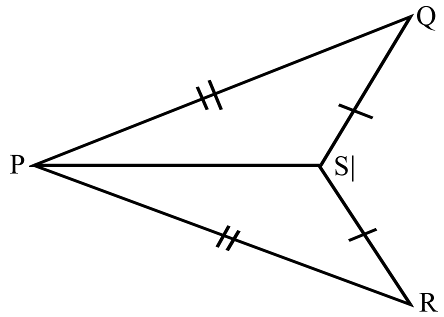
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $C\hat{A}E = D\hat{B}E$ และ AE = BE
จงอธิบายว่าเพราะเหตุใด $\Delta ACE \cong \Delta BDE$



1. $C\hat{A}E = D\hat{B}E$ (_______________)
2. AE = BE (_______________)
3. $A\hat{E}C = B\hat{E}D$ (_______________)

ดังนั้น $\Delta ACE \cong \Delta BDE$ (_______________)

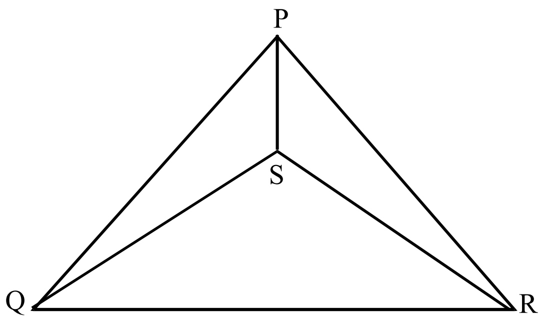
ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ PQ = PR และ QS = RS จงอธิบายว่า เพราะเหตุใด $\overline{PS}$ แบ่งครึ่ง $Q\hat{P}R$



1. ________________ (________________)
2. ________________ (________________)
3. ________________ (________________)
4. ________________ (________________)

$\therefore$ ________________ (________________)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ PQR และ SQR เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วสองรูปที่มีฐาน QR ร่วมกัน $\Delta PQS \cong \Delta PRS$ หรือไม่เพราะเหตุใด



1. ________________ (________________)
2. ________________ (________________)
3. ________________ (________________)

$\therefore$ ________________ (________________)

ตัวอย่างที่ 5 พิจารณารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่ามีความสัมพันธ์แบบใด